Ορισμός: Διατεταγμένο σύνολο με πρώτος μέλος το α και δεύτερο μέλος το β: $(\alpha,\beta) = \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$, με $\alpha \neq \beta$.

24/10/16

$(\alpha,\alpha) = \{\alpha\}$ $\quad \alpha = \beta$

Πρόταση: Αν (α,β), (α',β') διατεταγμένα ζεύγη τότε
$(\alpha,\beta) = (\alpha',\beta') \Leftrightarrow \alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta'$

Απόδειξη: Ας είναι $\alpha \neq \beta$. Τότε $(\alpha,\beta) = (\alpha',\beta')$

$$\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\} = \{\{\alpha'\},\{\alpha',\beta'\}\} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \{\alpha\} \in \{\{\alpha'\},\{\alpha',\beta'\}\}$$

δηλ. $\{\alpha\} = \{\alpha'\} \vee \{\alpha\} = \{\alpha',\beta'\}$

$\alpha = \alpha' \vee \alpha' \in \{\alpha\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$

Εφόσον αποδείχθηκε ότι $\alpha = \alpha'$ η $(*)$ γράφεται

$$\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\} = \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta'\}\}$$

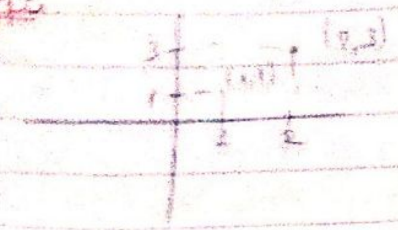
$$\Rightarrow \{\alpha,\beta\} = \{\alpha\} \vee \{\alpha,\beta\} = \{\alpha,\beta'\}$$

$\vee\ \beta \in \{\alpha,\beta'\}$ δηλ. $\beta = \alpha \vee \beta = \beta'$

αν $\alpha = \beta \Rightarrow \begin{cases} (\alpha,\beta) = \{\alpha\} \\ (\alpha',\beta'), \{\{\alpha'\},\{\alpha',\beta'\}\} \end{cases} \Rightarrow \{\alpha'\} = \{\alpha',\beta'\} \Rightarrow$

$\alpha' = \beta'$

Παράδειγμα



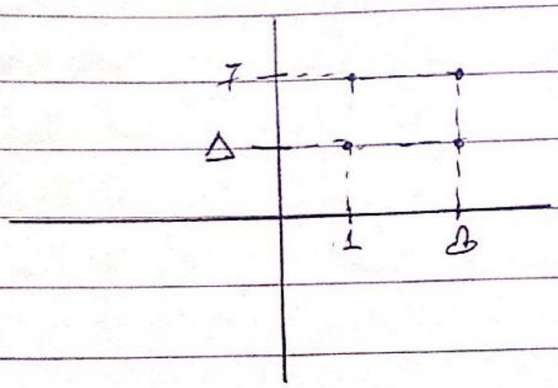
Ορισμός: Αν A, B σύνολα καλούμε καρτεσιανό γινόμενο του A, B το σύνολο

$$(A \times B) = \{(a,b),\ a \in A,\ b \in B\} \text{ αν } A \neq \emptyset,\ B = \emptyset$$

και θέτουμε $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$

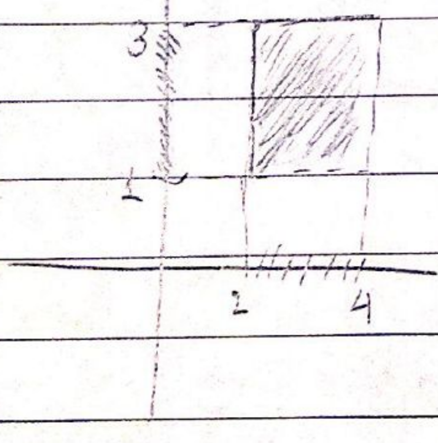
Παράδειγμα: $A = \{1, ♣\}$, $B = \{\Delta, 7\}$

$$A \times B = \{(1, \Delta), (1, 7), (♣, \Delta), (♣, 7)\}$$



Παράδειγμα: $[1,3] \times [2,4] = \{(x,y) : x \in [1,3], y \in [2,4]\}$

$1 \leq x < 3$, $2 < y \leq 4$



ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $A^2 = A \times A$

Παράδειγμα: $A = \{1, 2\}$

$A^2 = \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

(*) $A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

$A^2 = A \times A \rightsquigarrow \Delta = \{(a,a), a \in A\} \subseteq A^2$

$\rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{c} A \times B \neq B \times A \\ A \neq B \end{array}}$

Απόδειξη: Ας είναι $\cancel{A}\, B \neq \emptyset$ με $A \neq B$

Έστω ότι $a \in A$ ~~και~~ $a \notin B$

Επειδή υποθέτω ότι $A \neq B$ θα πρέπει $A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A$

Έστω ότι $A \nsubseteq B$ τότε $\exists\, a \in A, a \notin B$

Επειδή $B \neq \emptyset$, $\exists\, b \in B$

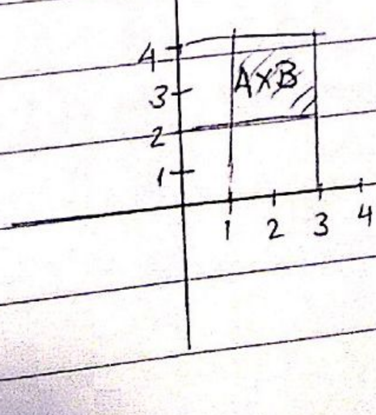
τότε $(a,b) \in A \times B$

αλλά $(a,b) \notin B \times A$

επειδή $a \notin B$

άρα $A \times B \neq B \times A$

$A = [1,3]$, $B = [2,4]$



► $(x,y) \notin A\times B \Leftrightarrow x \notin A \lor y \notin B$

$(x,y) \notin A\times B$

$\sim [(x,y) \in A\times B]$

$\sim [x\in A \land y \in B]$

$(\sim x\in A) \lor (\sim y \in B)$

$x \notin A \lor y \notin B$

$x \in A^c \lor y \in B^c$

Πρόταση: Για τυχόντα σύνολα A, B, Γ ισχύουν

i) $A\times B = B\times A \Rightarrow A = B \lor A = \emptyset \lor B = \emptyset$

ii) $A\times(B\cap\Gamma) = (A\times B)\cap(A\times\Gamma)$

iii) $(A\cap B)\times\Gamma = (A\times\Gamma)\cap(B\times\Gamma)$

iv) $A\times(B\cup\Gamma) = (A\times B)\cup(A\times\Gamma)$

v) $(A\cup B)\times\Gamma = (A\times\Gamma)\cup(B\times\Gamma)$

vi) $A\times(B-\Gamma) = (A\times B)-(A\times\Gamma)$

vii) $(A-B)\times\Gamma =$

HW για Τετάρτη 26/10
Ασκ 25, 27/6 Α 38

iv) Ας είναι $(x,y) \in A \times (B \cap \Gamma)$

τότε $x \in A \wedge y \in B \cap \Gamma$

$x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in \Gamma)$

$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in \Gamma)$

$(x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in A \times \Gamma$

$(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$

δηλ. $A \times (B \cap \Gamma) \subseteq (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$

v) $A \times (B - \Gamma) = A \times (B \cap \Gamma^c)$

$= (A \times B) \cap (A \times \Gamma^c)$

$= (A \times B) \cap (A \times (B - \Gamma))$

$(a,b) \in A \times (B - \Gamma)$

$\Rightarrow a \in A \wedge b \notin \Gamma$

$\Rightarrow \cancel{a \in A}\ (a,b) \notin A \times \Gamma$

$\Rightarrow A \times (B - \Gamma) \subseteq (A \times B) - (A \times \Gamma)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$

$(a,b) = \{\{a, \emptyset\}, \{B, \{\emptyset\}\}\}$

~~27) $(A \dot{-} B) \cup (B \dot{-} \Gamma) \cup (\Gamma \dot{-} A) = (A \cup B \cup \Gamma) - (A \cap B \cap \Gamma)$~~

$A \times B \Rightarrow$ σύνολο διατεταγμένων ζευγών

$\overset{\text{όχι}}{\Leftarrow}$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$G_f = \{ (x, f(x)) , \underbrace{x \in [0,1]}^{P_t} \}$

▷ $f(x) = x + 3 , \; x \in [0,1)$

▷ $(A \times B)^c = ?$

Συλλογή συνόλων $\mathcal{C}$.
Τα στοιχεία του $\mathcal{C}$ είναι σύνολα.

⤳ $\bigcup \mathcal{C} = \{ x : \exists\, G \in \mathcal{C} : x \in G \}$

⤳ $\bigcap \mathcal{C} = \{ x : x \in G \;\forall\; G \in \mathcal{C} \}$

▸ $\mathcal{C} = \{ \{1,3\}, \{\omega\}, \{3, ✿, \phi\} \}$

$\bigcap \mathcal{C} = \{1,3\} \cap \{\omega\} \cap \{3, ✿, \phi\} =$

$\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$

$\mathcal{C} = \{\{-x, x\},\ x \in [2,3]\} = \{[-2,2],\ [-3,3],\ [-2{,}5,\ 2{,}5]\}$

$\bigcap \mathcal{C} =$

$\bigcup \mathcal{C} = [-3,3]$

Διαμέριση ενός συνόλου A: $\mathcal{D}$

Μια συλλογή υποσυνόλων του A με:

$A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

$\bigcup \mathcal{D} = A$

Παραδείγματα: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\mathcal{D}_1 = \{\{1\}, \{2,4\}, \{3,5\}\}$

$\mathcal{D}_2 = \{\{2,1,4\}, \{3,5\}\}$

$\mathcal{D}_3 = \{\{2,5,4\}, \{1\}, \{3\}\}$

$\mathcal{C}$ κάλυψη του A αν

i) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$

ii) $\bigcup \mathcal{C} = A$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\mathcal{C} = \{\{1,2\}, \{2,4\}, \{5\}\}$

↓

κάλυψη του A

όχι διαμέριση